低维流形分类

逯晓零

2023 年 3 月 9 日

目录

1 导入

首先，这不是一篇简介性的文章，而是一篇实打实的证明文章，对于相关的概念和一些常见的定理，我们都会当成基础的事实，请读者先阅读完我写过的前两篇文章[18, 17]，理解一下那些基础的东西再来看这篇文章才是比较合理的。接着，我们这篇文章的目的是流形的分类，我们假设它基础前提是“T_2可分+第二可数的”，即“流形”指的就是拓扑流形，而“微分流形”(或者“光滑流形”)指带有光滑构造的拓扑流形，“同胚”(homeomorphism)指的是拓扑流

形上同构的概念，“微分同胚”(diffeomorphism)指的是微分流形上同构的概念。最后，我们来讲讲“分类”的含义是什么。

通常情况下，我们分类的起点都是(拓扑)流形的同胚分类，然后再考虑“流形上是否有微分构造？”、“如果有微分构造，那么它们是否是微分同胚的？”、“如果微分构造不互相同胚，那么有多少种微分构造？”。当然，这样的分类在超低维(n=1)情况或许确实足够，但很多时候基本数也数不清，那么我们还需要考虑的是流形间某些复合运算所生成的新流形，而我们应该找的是那些作为“积木”的流形，其中“连通和”就是一个典型运算，在n=2时的流形分类起着重要作用。

当然我们还需要排除一些十分没必要的情况，比如两个球分开放之类的，因此我们通常情况下，还给分类的流形附上一些拓扑上的前提，比如“连通性”就是拿来排除这些情况的，但是到底哪些情况是需要附上的呢？因为流形它自带了一些拓扑性质，我们胡乱的加上拓扑前提就不是好的行为，我们就简单的把这些性质列举出来，都是很好证明的，我们就直接略过了。

定理 1.1: *任何(拓扑)流形都是，局部道路连通的、连通的⇔道路连通的、连通分支⇔道路连通分支、连通分支的个数是可数的、每个连通分支是开集且是连通流形、局部紧的、拟紧的(也叫仿紧的,paracompact)、基本群是可数的、开子集都是流形、0维⇔可数离散空间。*

另外，“流形”一词默认是不带边的，除非我们特别地说“带边流形”。从上面的一系列性质可以知道，我们最先加上的一定是“连通性”了，换言之，我们考虑流形分类以后只考虑连通的流形。最后，我们来总结一下，我们所说的“n维流形”，指的是局部同胚于$\mathbb{R}^n$的“T_2可分+第二可数+连通”的拓扑空间。最后的最后，我们排除n=0的情况，因为可数离散空间，即$(X,2^X)$且X可数的情况，是一个平凡拓扑，没啥意思。

2 一维流形

2.1 几个实例

在开始流形分类之前，我们先要做的就是在$\mathbb{R}^n$找到几个实例，接着就是把这些实例作为流形分类中的代表元，在$\mathbb{R}^n$中流形实例，我们默认它的拓扑是由欧式度量$\rho(x)=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$所诱导的拓扑。

1. 实直线:$\mathbb{R}$
2. 开区间:$(a,b)\subset\mathbb{R},b>a$
3. 圆:$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}$

在这里我们要稍微提醒一下读者，首先S^1是$\mathbb{R}^2$中的闭集，其次S^1作为拓扑空间时它的开集为“$\mathbb{R}^2$中的开集$\cap S^1$”，而此时S^1在它自己的拓扑上就可以是开集，最后S^1无法直接继承$\mathbb{R}^2$中的流形构造，所以我们必需手动构造出它相应的局部坐标，不过过程十分简单，随便无视两个点对应到实直线(从而是一维的)，再粘合即可。然后(a,b)和$\mathbb{R}$显然是同胚的(通过正切函数)，而且所有开区间也是显然同胚的(通过一次函数)，因此我们只需要选择区间$(0,1)$即可。接着$(0,1)$是非紧空间，而S^1是紧空间，由于紧性是拓扑不变量，所以这两者一定不同胚，换言之至少有两种一维流形。

更近一步，我们可以说明$(0,1)$和S^1具有光滑构造，从而是微分流形。区间$(0,1)$可以直接从$\mathbb{R}$继承光滑构造，而对于圆S^1，我们可以先找只有两个元素的开覆盖$S_+ = \{(cos\theta, sin\theta) \in S^1 : \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \subset \mathbb{R}\}$和$S_- = \{(cos\theta, sin\theta) \in S^1 : \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \subset \mathbb{R}\}$，它们在公共部分的转移函数通过$y = x + \pi$即可以实现，接着根据任一构造可以扩充为唯一的微分构造即可以得到S^1上的光滑构造了。

最后我们要考虑光滑构造的唯一性了。先看$(0,1)$，我们给出的光滑构造是由$i : (0,1) \to (0,1) \subset \mathbb{R}, x \mapsto x$扩充而成的，首先第一点我们要知道存在局部坐标$(U,\varphi)$与$(i,(0,1))$是不相容的[1]，比如折线映射，而且它自己也能生成一个光滑构造，在折线上取不包含折点的开集，它与$(i,(0,1))$和(U,φ)是相容的，因此*相容不满足传递性*。所以证明光滑构造的唯一性并不简单，我们先声明所谓的“唯一性”指的是“任意两个光滑构造是微分同胚的”。

2.1.1 开区间上光滑构造的唯一性

对于流形$((0,1),\mathscr{A})$，我们假设$\mathcal{A},\mathcal{B} \subset \mathscr{A}$是两个光滑构造，其中$((0,1),i) \in \mathcal{A}$。为了方便，我们记$I = (0,1)$，那么我们的目的是证明$(I,\mathcal{A})$与$(I,\mathcal{B})$是微分同胚的。首先对于局部坐标$(J,\varphi) \in \mathcal{B}$，我们可以假设$J$是连通的，即它是一个开区间，否则由于同胚可以保持连通性，考察复合映射的光滑性时也可以分开看。接着，我们考虑两个局部坐标$(U,\varphi),(V,\psi) \in \mathcal{B}$，我们可以发现$\varphi(U\cap V)$和$\psi(U\cap V)$都是开区间。

此时我们可以构造一个光滑变换$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto kx + h, h \in \mathbb{R}$，使得$L(\psi(U\cap V)) = \varphi(U\cap V), L(\psi(V - U\cap V)) \cap \varphi(U - U\cap V) = \varnothing$，于是我们记一个新的局部坐标为$f : U \cup (V - U\cap V) \to \varphi(U) \cup L(\psi(V - U\cap V))$，由$\psi$的相容性可知，$(U\cup V, f) \in \mathcal{B}$，简单来讲就是两个小的局部坐标可以拼成一个更大的局部坐标。

此时，我们只需找一个I的开覆盖$\{U_i,\varphi_i\} \subset \mathcal{B}$，就可以得到一个局部坐标$\varphi : I = \cup U_i \to (a,b) \subset \mathbb{R}$满足$(I,\varphi) \in \mathcal{B}$，于是我们可以令同胚为$f : (0,1) \to (0,1), x \mapsto \varphi^{-1}((b-a)x + a)$，很容易证明它就是$(I,\mathcal{A})$到$(I,\mathcal{B})$的微分同胚。因此我们证明了，开区间上的光滑构造的唯一。

2.1.2 圆上光滑构造的唯一性

对于圆的情形和前面基本差不多，我们要证明$(S^1,\mathcal{A})$与$(S^1,\mathcal{B})$是微分同胚的，其中的$\mathcal{A}$是我们的通常构造。唯一的区别是，在$\mathcal{B}$中$\varphi(U\cap V)$可能是两个开区间的并，因此在最后，我们得到是，至少存在两个局部坐标$\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\} \subset \mathcal{B}$可以覆盖$S^1$。

我们记$\varphi_1(U_1) = (a,b), \varphi_2(U_2) = (c,d), a < c < b < d$，我们构造相应的映射$f : S^1 \to S^1$，它满足对任意的$x = (cos(\theta), sin(\theta)) \in S^1$，如果$x \in S_+$则对应到$\varphi_1^{-1}(f_1(\theta))$，其中$f_1 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to (a,b)$是一个线性函数，同样地引入$f_2$，如果$x \in S_-$则对应到$\varphi_2^{-1}(f_2(\theta))$，这样$f$就是我们需要的微分同胚了。

2.1.3 一个特例的微分同胚

通过上面的证明，我们发现证明微分同胚唯一性的关键，其实是将局部坐标的同胚变成流形上的自同胚变换，通过正反抵消，复合映射的光滑性就变成了局部坐标的光滑性了。为了更

[1] 以后我们局部坐标的“相容”统一指“C^∞相容”

加深刻地理解这个思想，我们来举一个简单的例子，假设区间$(-1,1)$上的两个光滑构造由下面的两个开覆盖分别生成。

$$\{(-1,1),\varphi_1\}$$
$$\{(-1,1),\varphi_2\}$$
$$(-1,1),\varphi_1(x)=x,x\in(-1,1)$$
$$(-1,1),\varphi_2(x)=\begin{cases}x & ,x\in(-1,0)\\ 0 & ,x=0\\ 2x & ,x\in(0,1)\end{cases}$$

我们要证明这两个光滑构造是微分同胚的，显然是不能直接使用$i:(-1,1)\to(-1,1),x\mapsto x$作为同胚的，因为这样我们怎么也无法找到局部坐标使得它在$x=0$处是光滑的，但我们可以想象一个同胚映射$f:(-1,1)\to(-1,1)$，它满足$f(p)=0,p\in(-1,1)$，且可以有局部坐标使得它是光滑的，它只需要把φ_2中的不光滑点消除即可。首先，我们选定f的下面形式[2]。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+p}(x-p) & ,x\in(-1,p)\\ 0 & ,x=p\\ \frac{1}{1-p}(x-p) & ,x\in(p,1)\end{cases}$$

接着我们把对应局部坐标的复合函数$g=\varphi_2 f\varphi_1^{-1}:(-1,1)\to(-1,2)$给计算出来

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+p}(x-p) & ,x\in(-1,p)\\ 0 & ,x=p\\ \frac{2}{1-p}(x-p) & ,x\in(p,1)\end{cases}$$

计算$\frac{1}{1+p}=\frac{2}{1-p}$可以得到$p=-\frac{1}{3}$，带入即可得到$g$是一条直线，从而$f$就是我们需要的微分同胚了。这时读者要发现一个重要的事实，光滑映射可能看起来不是“光滑的”，它的光滑性主要是由复合映射的光滑性来承担的，笔者希望读者在学习流形的时候要充分理解这个事实。

2.2 拓扑分类

在理解完两个简单的实例以后，我们来思考一下流形的拓扑分类，即一维流形在同胚下有多少种可能性。此时我们只能单纯地来考察流形$(M,\mathcal{A}=\{U_i,\varphi_i\}),\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}$，流形的基本思想是将一个个同胚于欧氏空间的局部粘合成一个整体，由于在最开始我们假设M是连通的，因此我们可以找到一个由连通子集构成的开覆盖，即可以附上条件“任意U_i是连通的”。由于我们比较熟悉$\mathbb{R}$上的拓扑性质，比如“开集都是开区间的分离并”之类的，所以我们先来考察两个局部坐标$(U,\varphi),(V,\psi)\in\mathcal{A},U\cap V\neq\varnothing$，由于$M$是$T_2$空间，我们可以通过取点和局部领域上的限制，转化为另一种情况，从而附上条件“$U\not\subseteq V,V\not\subseteq U$”。

[2] $C^0(I,I),I=(-1,1)$里的元素其实很多，不止我们所选择的那个

2.2.1 局部上

我们记$I=\varphi(U), J=\psi(V)$，由连通性的假设它们是两个开区间。首先，读者要注意$\varphi(U\cap V)$虽然是一个同胚，因此是一个开集，但由于$U\cap V$不一定连通，所以$\varphi(U\cap V)$不一定是连通的。我们记$\Gamma\subset I\times J$且$(s,t)\in\Gamma\Leftrightarrow\varphi^{-1}(s)=\psi^{-1}(t)$，即由两个局部坐标在公共部分构成的图。由s和t的唯一对应性可知$\Gamma:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V), x\mapsto y, (x,y)\in\Gamma$一定是一个局部单调的函数，因此$\Gamma$最多只有两个连通分支，从而$\varphi(U\cap V)$和$\psi(U\cap V)$最多是两个开区间的并。

如果$\varphi(U\cap V)$只有一个连通分支，此时可以记$(a,b)=\varphi(U\cap V), (c,d)=\psi(U\cap V)$，接着我们需要一个线性变换$L:(b,b+d-e)\to(e,d)$来保证拼接后的映射是连续的从而是一个同胚，其中有$e=\lim_{t\to b}\psi\varphi^{-1}(t), t\in(a,b)$，此处连续函数保证了极限的存在。这时我们定义一个连续映射为$f:(0,1)\to U\cup V, g((b+d-e-a)x+a)$，并且$g:(a,b+d-e)\to U\cup V$的定义为

$$g(x)=\begin{cases}\varphi^{-1}(x) & ,x\in(a,b)\\ \psi^{-1}(L(x)) & ,x\in(b,b+d-e)\end{cases}$$

验算可得f是一个同胚。接着我们考虑$\varphi(U\cap V)$有两个连通分支的情况，我们记$(b_1,a_1)\cup(a_2,b_2)=\varphi(U\cap V), b_1<a_1\le a_2<b_2$，同样地我们构造粘合函数$f_1:(0,\pi)\to(b_1,b_2), f_2:[\pi,2\pi]\to[d_2,d_1]$，其中有$d_i=\lim_{t\to b_i}\psi\varphi^{-1}(t), i=1,2$，如果$d_1=d_2$我们可以把$U\cup V$视为$U$的单点紧化[3]，否则我们可以得到一个连续映射$f:S^1\to U\cup V$，它的定义为

$$f(e^{i\theta}=(cos\theta,sin\theta))=\begin{cases}\varphi^{-1}(f_1(\theta)) & ,x\in(0,\pi)\\ \psi^{-1}(f_2(\theta)) & ,x\in[\pi,2\pi]\end{cases}$$

同样验算可得f是一个同胚。也就是我们证明了，任何一维流形的开集局部一定同胚于$(0,1)$或者S^1，接下来我们要把它粘合成一个整体了。

2.2.2 整体上

很容易证明流形是可度量化的，因此流形M存在一个局部有限可数的开覆盖$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，并且满足$\varphi_i(U_i)$是一个开区间。注意我们之前假设的互不包含关系是依旧满足的，即$U_i\not\subseteq U_j, i\neq j$。另外，由于$M$是连通的，也就是我们任何一个开集都可以想办法通过交转移到另一个开集上，换言之，借助指标的顺序性我们可以再增加一个条件$\forall n, U_n\cap(U_1\cup...\cup U_{n-1})\neq\varnothing$。

如果M是紧的，那么上面的开覆盖是有限的。我们可以把它顺序地记为，$M=U_1\cup...\cup U_n$，如果$U_1\cup U_2$与S^1同胚，那么$U_1\cup U_2$一定是紧子集，由于U_3是开集，并且$U_3\cap(U_1\cup U_2)$非空，故$U_3\cup U_1\cup U_2$开集，因此如果$n>2$，则M一定同胚于$\mathbb{R}^n$的一个开集，如果$U_1\cup U_2$与$(0,1)$同胚，并且不存在$m<=n$使得$U_m\cup(U_1\cup...U_{m-1})$与$S^1$同胚，则也会导致$M$一定同胚于$\mathbb{R}^n$中的一个开集。结合两种情况可知，$M$只能与$S^1$是同胚的。

如果M是非紧的。如果开覆盖是有限的，由上一步可知它将同胚于S^1，与非紧矛盾，因此开覆盖一定是无限可数的。此时任意的$U_i\cap U_j$最多只能得到一个区间，因此无论我们怎么进行粘合最后都只能得到一个区间，从而M于$(0,1)$是同胚的。因此我们证明了，一维紧流形同胚于圆，一维非紧流形同胚于开区间。

[3] 局部紧的T_2空间的单点紧化是唯一的，由于S^1是紧的，就会得到同样的结论

2.3 总结

有些人可能会妄想这样一种情况，就是M与N是同胚的，但不相同的，那么有没有一种可能是，M上的微分构造数和N的微分构造数不相等。如果陷入这种误区，就会很容易在之前的情况下栽跟头，比如，我们执意地认为$(0,1)$上的微分构造进行同胚的时候一定要使用恒等映射。但如果我们严谨地来看定义的话，它要求是存在一个同胚，换言之就算是同一个流形，我们也可以把自同胚给算到里面去。至于，带边的情况也没啥好考虑的，流程基本是一致的，只是我们需要稍微一点的极限理论来得到边界点，总之，我们的结论如下。

定理 2.1 (**一维流形分类**): 在“流形”等价于“豪斯多夫+第二可数+连通”的前提下

(1)一维流形的同胚和微分同胚是等价的

(2)一维紧流形同胚于S^1

(3)一维非紧流形同胚于$\mathbb{R}$

(4)一维带边紧流形同胚于$I=[0,1]$

(5)一维带边非紧流形同胚于$\mathbb{R}_+$。

为了大家深入理解这四种流形，我们来试着讨论它们的一些性质，当然我们也懒得去证明。我们定义一个流形X是**可收缩的**(Contractible)，如果存在一点$p\in X$使得$1_X: X\to X, x\mapsto x$与$pt: X\to\{x\}$是同伦的。于是我们可以证明，一维流形，要么是可收缩的、要么同伦于一个圆，一维流形都是可定向的。我们还可以试着计算一下一维流形的同调群，不过最多也就两个不是平凡的。

表 1: 一维流形的奇异同调群

流形	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	S^1	I
$H_0(X)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$H_1(X)$	0	0	$\mathbb{Z}$	0
$H_0(X,\partial X)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$H_1(X,\partial X)$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\chi(X)$	-1	0	0	1

我们还顺便把由同调群计算的欧拉示性数也给了出来。而一维流形的基本群就更简单了，除了$\pi_1(M)\cong\mathbb{Z}$以外都是平凡群。其实一维流形也没啥可讲的，有兴趣的读者，可以参考[16]，其列举了十分详细的内容。

3 二维流形

3.1 几个实例

一维流形确实很简单，但是从二维开始就出现了巨大的变化。首先，光滑构造的唯一性参考[8]，各种文献的索引也在里面了，二维情形是一篇德语论文，我实在是看不懂，如果是法语我还能试试。其次，紧流形参考[7]，非紧流形参考[1]，相应的索引看参考文献。最后，我们将主要对流形进行拓扑分类，包括后面的3维情形也是一样的，至于这个定理。

定理 3.1: 任何$n(0 \leq n \leq 3)$维流形上，同胚和微分同胚是等价的。即任何不超过3维的流形都具有唯一的光滑构造。

我们把它当成一个事实好吗，因为我们的作者还是想直奔主题，不想在2维流形上消耗太多时间。我们只对紧流形进行证明，因为后面我们要讨论的“几何化定理”也是在紧流形上的，其实只是我懒了，非紧流形的分类叙述太麻烦了，实在是不想写了。在最开始，我们还是先试着构造几个实例。

1. 球面:$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$
2. 环面:$\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$
3. 实射影平面:$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim, a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, a = kb$

有关它们上面的局部坐标，甚至是光滑构造常见得不能再常见了，基本每一本流形的书都会介绍。还有一个比较重要的流形是开圆盘(disk)$\mathbb{B}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$，如果我们定义$\partial\overline{\mathbb{B}^2}$上的等价关系为$(-x,y) \sim_1 (x,y)$，则有同胚$\overline{\mathbb{B}^2}/\sim_1 \cong \mathbb{S}^2$。如果我们定义一个正方形$S = \{|x|+|y| \leq 1\}$，并在$\partial S$定义等价关系$(-x,y) \sim_1 (x,y)$，则有同胚$S/\sim_1 \cong \mathbb{S}^2$。类似地，如果我们将边界的关系换为$(-x,-y) \sim_2 (x,y)$，就可以得到同胚$\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{B}^2/\sim_2 \cong S/\sim_2$。证明都是很简单地，画个图，做条射线，解个方程什么的就能轻松地得到，读者需要注意到一点，虽然S不是流形，但$\mathbb{B}^2$是流形，而且两者是同胚的，换言之“流形”不是什么同胚不变量。最后，我们再定义一个常见的流形，对于$I^2 = [0,1] \times [0,1]$，我们定义等价关系为$(0,t) \sim (1,t), (t,0) \sim (1-t,1)$，于是我们把$K^2 = I^2/\sim$称为**克莱因瓶**(Klein bottle)。有关二维流形，我们需要先介绍一些比较基础的理论内容，主要有两个方面，分别是二维紧流形的“连通和”(connected sum)和“标准模型”(standard model)。

定义 3.1: 设M是一个n维流形

(1)我们记$\mathbb{B}^n = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2+...+x_n^2 < 1\}$。如果开集$U \subset M$同胚于$\mathbb{B}^n$，我们就把$U$叫做$M$上的一个**坐标球**(coordinate ball)

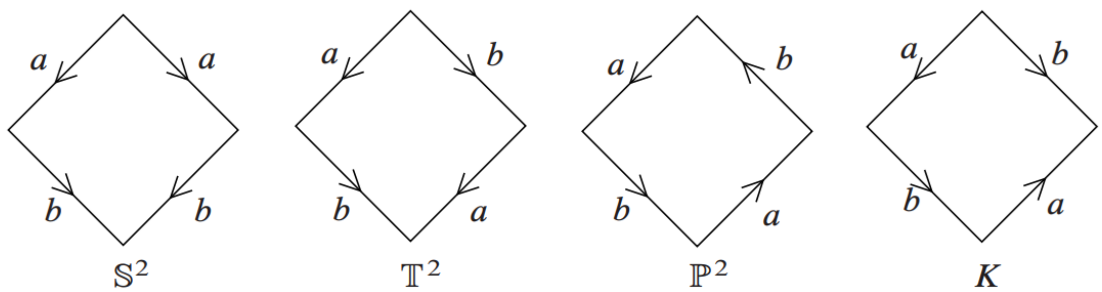
(2)我们记$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x-x_0) < r, x_0 \in \mathbb{R}^n\}$。对于坐标球$U \subset M$，如果存在$\overline{B}$的一个开领域$B'$和一个同胚$\varphi : B' \to B_{r'}(x_0)$使得$\varphi(B) = B_r(x_0), \varphi(\overline{B}) = \overline{B_r(x_0)}$，就称$U$是一个**正则坐标球**(regular coordinate ball)。

实际上，如果坐标球$U \subset M$满足有同胚$\varphi : U \to B_{r'}(x_0)$，则对任意$0 < r < r'$都有$\varphi^{-1}(B_r(x_0))$是正则坐标球，为什么要加个正则的条件呢？主要是为了排除极限导致的降维情况，一个简单的例子是$\mathbb{S}^2$扣去一点后是一个坐标球，但不是正则的。至于正则坐标球的存在性，通过局部欧式化的性质可以轻松证明，就不讲了。

设两个n维流形M_1, M_2，选取其上的正则坐标球$B_i \subset M_i, (i=1,2)$，记$M_i' = M_i - B_i$，由正则性很容易证明$\partial M_i' \cong \mathbb{S}^{n-1}$，于是我们有同胚$f : \partial M_2' \to \partial M_1'$。对于并集$M_1' \sqcup M_2'$，我们定义等价关系$x \sim f(x)$，并记$M_1 \# M_2 = M_1' \sqcup M_2'/\sim$，称其为$M_1$与$M_2$的**连通和**。形象地理解就是在两个曲面上挖掉一个圆盘，再从边界上进行粘合。注意，我们的前提假设流形是连通的，虽然B_i, f的选取很多，但可以证明两个流形的连通和在同胚意义下至多有两个，特别地，在2维流形的情形下连通和是唯一的。笔者目前找不到证明，但是读者应该可以从形象中感受

到，而且实际上我们证明分类的时候，只需要连通和可行就行了，唯不唯一是无所谓的。另外有一些简单的情形，比如$M\#\mathbb{S}^n \cong M$，和一些简记符号$\#_g M = \underbrace{M\#...\#M}_{g}$，要知道一下。

接下来，我们要介绍标准模型，对任意集合$X = \{a_1, ..., a_n\}$，引入$X^{-1} = \{a_1^{-1}, ..., a_n^{-1}\}, X^{-1} \cap X = \varnothing$，我们把任意一个$x_1..x_r := (x_1, ..., x_r), x_i \in X \sqcup X^{-1}$称为一个**多边形表示**(polygonal presentation)。其实所谓的多边形表示，无非就是一个符号列，比如$aa^{-1}, aba^{-1}b^{-1}, aa$等等，单纯从符号角度考虑，上标只是为了告诉你，它们有关系但不相同。如果想要具象化一个多边形表示$x_1..x_r$的话，先画一个正r边形，当然这个边是弯的也无所谓，这样2边形也能画出来，关键还是区分处点，接着我们选定一个点和一个选择方向，如果x_i不带上标，就边上记x_i和正向，如果带上标就画反向。比如下面这些来自GTM202的图



就分别是$abb^{-1}a^{-1}, aba^{-1}b^{-1}, abab, abab^{-1}$的具象化。如果一个多边形表示中的符号是成对[4]出现的，就把它称为**曲面表示**(surface presentation)。我们之前具的例子都是曲面表示，像$aaa, ab^{-1}, aaaa$之类的就不是曲面表示了。

对于一个多边形表示和它的具象化，我们把记号相同的点进行等价，相同的(比如a, a或a^{-1}, a^{-1})进行直接的边等价，相反的(比如a, a^{-1})进行反向等价，则我们平面上这片闭区域关于这个等价的商集所得到的拓扑空间，称为这个多边形表示的**几何实现**(geometric realization)。由我们之前的讨论可以知道，$abb^{-1}a^{-1}$的几何实现同胚与球面，$abab$的几何化实现同胚与实射影空间。如果一个拓扑空间，同胚于一个多边形表示的几何实现，我们就把这个多边形表示称为拓扑空间的一个**标准模型**。标准模型是不唯一的，比如$abab$和aa都是实射影空间的标准模型。

对于一个曲面表示，我们可以定义一系列的**基本变换**(elementary transformation)为

1. 重命名:$x_1...a-...a-...x_r \to x_1...b-...b-...x_r$，简单明了就是把记号换成一个没出现过的记号
2. 弯折:$x_1...a-...a-...x_r \to x_1...e-a-...e-a-...x_r$，就是在多边形的对应边上分别弯折一下从而产生新的边
3. 和并:$x_1...e-a-...e-a-...x_r \to x_1...b-...b-...x_r$，就是弯折的反过来操作只要对应边具有相同的上标即可
4. 反射:$a_1...a_m \to a_m^{-1}...a_1^{-1}$，即镜面反射
5. 旋转:$a_1a_2...a_m \to a_2...a_ma_1$，名副其实

[4] 每一对都可以是(a, a),(a^{-1}, a),(a^{-1}, a^{-1})中的任意一种情况

6. 折叠:$x_1...x_{i-1}ee^{-1}x_i...x_r \to x_1...x_{i-1}x_i...x_r$

7. 展开:$x_1...x_{i-1}x_i...x_r \to x_1...x_{i-1}ee^{-1}x_i...x_r$

实际上，还有“分割”和“粘合”，但笔者觉得是没必要的，容易证明，经过基本变换的多边形表示的几何实现都是同胚的。就是没有“分割”和“粘合”，我们也还是能证明如果2维流形M_1, M_2的标准模型分别是$p = x_1...x_r$和$q = x_{r+1}...x_{r+s}$并且字符完全不同，那么$M_1\#M_2$的标准模型就是$pq = x_1...x_rx_{r+1}...x_{r+s}$。借助这个事实，我们可以发现球面有一个标准模型$aa^{-1}$，而它与任意2维流形做连通和，都可以在表示中通过“折叠”消去这一项，从而与原流形同胚。二维流形的拓扑性质确实很有趣，我们只需要借助“连通和”和“标准模型”就可以在拓扑上对紧流形进行分类了。

3.2 拓扑分类

首先是一个重要的事实。

定理 3.2: *任何2维流形都同胚于一个2维复形。并且这个复形内的任意一个1维单形都是正好两个2维单形的面。*

它和前面证明2维流形上的光滑结构唯一是来自同一篇论文的，1925年Tibor Rado用德文写的一篇论文，太久了找不到完整版的，而且所有的书基本都是提及这个事实，也没给出证明，虽然论文好像才20页左右，但如果把引用也算进去应该就不止如此了。笔者真的无能为力了，我们来证明一些比较简单的东西吧。

定理 3.3: *任何紧2维流形都有一个曲面表示作为标准模型。*

证明. 由前一个定理可得，我们只需要考虑2维复形K对应的拓扑空间$|K|$有标准模型即可。首先我们为其中的每一个2维单形构造一个长度为3的多边形表示，如果两个2维复形有相同的1维单形作为边就使用相同的记号，再全部连起来，由于任意一个1维单形都是正好两个2维单形的面，因此其构成一个曲面表示P。我们的目的就是证明这个曲面表示的几何实现$|P|$与$|K|$是同胚的，从而证明我们的结论。

我们记K^2为K所有2维单形并集形成的拓扑，此时$\pi_K : K^2 \to |K|$是恒等映射从而是一个同胚，我们还能得到一个映射$\pi_P : K^2 \to |P|$，由于K^2可以对应到P，通过等价形成的商空间就是到$|P|$的对应，如果能证明这是一个同胚就能得到我们想要的结果了。为了方便起见，我们把1维单形称为“边”，0维单形称为“点”，由P的粘合方式可知，2维单形的边对应π_K和π_P是一致的，因此我们只需要证明，π_K和π_P在点的对应上是一致的即可。

这一点主要由边的对应推导而来，我们主要讲一下这个过程。因为$|K|$是一个2维流形，因此任意的点$v \in K$一定不是$|K|$的孤立点，也就是说，它一定是K中某个边的顶点，而这条边由恰好是两个面的公共边，我们假设这两个面为σ, σ'。我们引进一个术语，如果存在一个面的序列$\sigma = \sigma_1, ..., \sigma_k = \sigma'$使得每个面包含点$v$且$v_i, v_{i+1}$有公共边，就称$\sigma, \sigma'$在$v$是**边相连的**。简单来看的话，就是一点周围的面互相是在这点处是边相连的，因此它构造了一个包含v点所有面的等价关系，虽然在2维上看起来等价类只有一个，但还是需要证明，如果证明了唯一性，那么P粘合的结果得到的点与π_K在点对应上就是一致的，从而得到了我们的结论。

我们假设$v \in K$通过边相连的得到的等价类不唯一，那么我们就能得到两个不相交的面集合$\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}, \{\tau_1, ..., \tau_m\} \subset K$。在$v$处，我们选择一个足够小的开球[5]$B_\varepsilon(v)$，则$B_\varepsilon(v) \cap |K|$是$K$的开子集[6]，从而是一个2维流形。因此$v$有一个领域$W \subset B_\varepsilon(v) \cap |K|$同胚于$\mathbb{R}^2$，从而$W' = W - \{v\}$是连通子集。

如果我们记$U = W \cap (\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_k) - \{v\}, V = W \cap (\tau_1 \cup ... \cup \tau_1) - \{v\}$，则由于我们所定义的等价关系导致它们都是$|K|$中的开集，并且$W' = U \cup V$是不连通的，前后矛盾。从而等价类是唯一的，定理得证。 □

要笔者来说的话，“定理3.3”的证明其实一点也不重要，关键还是“定理3.2”，得到它以后，后面的内容其实都是挺自然的。这个定理告诉我们，对于紧流形的同胚问题，可以转化为其对应标准模型的基本变换问题。换言之，我们只需要证明任意的曲面表示都可以通过基本变换化为一些标准的模式即可完成分类定理，我们来把这些标准的模式给列举出来。

1. 球面$\mathbb{S}^2$:aa^{-1}
2. 环面的连通和$\#_g\mathbb{T}^2$:$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$
3. 实射影平面的连通和$\#_g\mathbb{P}^2$:$a_1a_1...a_na_n$

我们把上面的这些曲面表示称为**标准表示**(standard presentation)。因此我们只需要证明，*任意曲面表示都可以化为标准表示*，就相当于证明了，*任意2维紧流形都同胚于球面或环面的连通和或实射影平面的连通和*，为了更好地研究表示，我们来试着讨论一下“表示”的运算。首先，如果一个表示可以通过基本变换转化为另一个，我们就用≈将它们连接起来，比如

$$bcdb^{-1}cd^{-1} \approx bcab^{-1}ca^{-1} \approx ebcae^{-1}b^{-1}ca^{-1} \approx bcab^{-1}ca^{-1}$$

$$\approx ac^{-1}ba^{-1}c^{-1}b^{-1} \approx c^{-1}ba^{-1}c^{-1}b^{-1}a \approx c^{-1}bee^{-1}a^{-1}c^{-1}b^{-1}a \approx c^{-1}ba^{-1}c^{-1}b^{-1}a$$

在上面我们依次演示了“重命名”、“弯折”、“和并”、“反射”、“旋转”、“展开”、“折叠”。接下来，我们再定义“添逗号”和“删逗号”运算，它们分别相当于把一个连通流形进行分割和把两个连通流形进行粘合。

$$x_1...x_ix_{i+1}...x_r \approx x_1...x_ie, e^{-1}x_{i+1}...x_r$$

$$x_1...x_ie, e^{-1}x_{i+1}...x_r \approx x_1...x_ix_{i+1}...x_r$$

请读者注意，这样得到的两个拓扑空间是不同胚的，因为它们连通性就不一样了。如果我们把流形的“连通性条件”给去掉，那么所有的紧流形都可以由“带逗号的多边形表示”作为标准模型，那么我们就能轻松地证明，如果两个流形的逗号个数相同，且可以通过“带上逗号运算的基本变换”进行转化的话，那么它们就是同胚的，借助这个性质，我们就可以得到两个基本引理。

$$abab^{-1} \approx bbcc, K^2 \cong \mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$$

[5]稍微提醒一下读者$|K| \subset \mathbb{R}^n$

[6]再提醒一下，它不是欧氏空间的开集

$$abab^{-1}cc \approx a^{-1}d^{-1}adee, K^2\#\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$$

对于它们的证明，我就直接放图了，随便搞搞就能出来，实在没啥好说的。

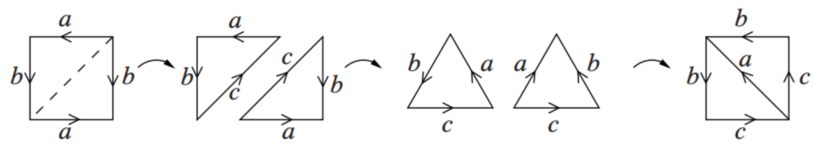


Fig. 6.18: Transforming the Klein bottle to $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

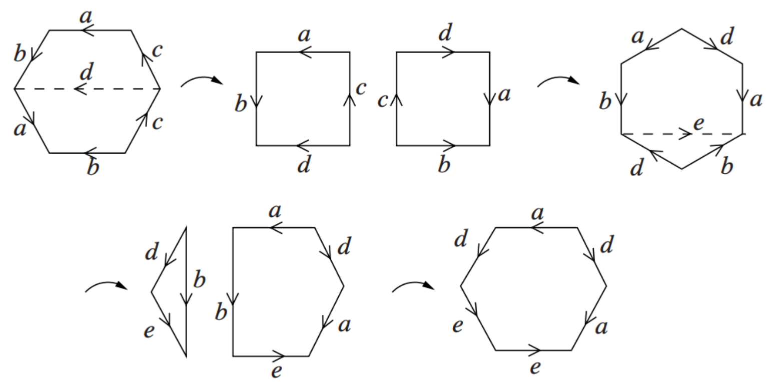


Fig. 6.19: Transforming $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ to $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$.

接下来，我们就可以愉快地来玩“曲面表示代数”了，我们先把曲面表示的严格形式写出来。我们使用“大写”来表示多边形表示里的一段内容，比如$x_1x_2x_3x_4x_5$我们就可以写成x_1Px_5或者Px_4x_5或者x_1Px_4Q或者Px_1Q之类的，我们来递归地定义**曲面表示**，首先$xx, xx^{-1}, x^{-1}x, x^{-1}x^{-1}$都是曲面表示，$PxQyT$是曲面表示当且仅当$PQT$是曲面表示。对于大写$P = x_1...x_r$我们使用$P^{-1} = x_r^{-1}...x_1^{-1}$来表示反射。通过旋转可得曲面表示的基本形式是$x_1Px_2Q(x_1, x_2 = a, a^{-1})$。

Step1:我们注意到一个简单的事实，即$M \cong M\#\mathbb{S}^2, P \cong Paa^{-1} \cong Qaa^{-1}S$。换言之多边形表示中的$aa^{-1}$可以像对子一样给消除掉，特别地，如果消除以后只剩下一个对子那么它必定同胚于一个球面。更进一步地，我们考虑$x^{-1}Px^{-1}Q$通过“反射”和“旋转”可以直接转化为$xP'xQ'$。换言之，一个曲面表示如果不同胚于球面，那么它的基本形式是$xPxQ$或者$xPx^{-1}Q$。

Step2:我们先考虑$xPxQ$情形。首先我们可以得到一个对的转化公式

$$xPxQ \approx xPe, e^{-1}xQ \approx Pex, x^{-1}eQ^{-1} \approx PeeQ^{-1} \approx eeQ^{-1}P$$

重命名什么的读者自己去做吧有点浪费时间，比如$eeQ^{-1}P \approx xxQ^{-1}P$，接着我们只要反复地把对$ee$放到$Q$的最后，$Q^{-1}$会使得对相连起来。因此任意(不同胚于球面的)[7]曲面表示的基本形式是$Ax_1x_1...x_rx_r$，其中的A均由$xPx^{-1}Q$的格式进行生成。

Step3:接上一部分如果A是空的，则它同胚于r个实射影平面的连通和。反之在A中我们一定可以找到形式$PxQyRx^{-1}Sy^{-1}T$。为了得到这一点，我们先来看一个转化公式

[7] 以后为了方便，我们把已经化简后的条件省略不说

$$xPQx^{-1}R \approx xPe^{-1}, eQx^{-1}R \approx Pe^{-1}x, x^{-1}ReQ \approx eQPe^{-1}R$$

我们注意到这是一个保持尾巴并且交换内部的一个变换。假设上述形式不存在，我们考虑形式$x...x^{-1}...$，任何一个对必需处于x^{-1}的两边，否则我们就直接找到了P为空时的情况。此时，考虑形式$xa...a^{-1}...x^{-1}$，同样地任何一个对不能处于a^{-1}的两边，在第一个...我们进行反复的操作就会不断地得到$a_ia_i^{-1}$从而不断消除这些项得到A是空的，与假设矛盾了。此时，我们有下面的变换

$$PxQyRx^{-1}Sy^{-1}T \approx xQyRx^{-1}Sy^{-1}TP \approx xyRQx^{-1}Sy^{-1}TP \approx yRQx^{-1}Sy^{-1}TPx$$

$$\approx yx^{-1}SRQy^{-1}TPx \approx x^{-1}SRQy^{-1}TPxy \approx x^{-1}y^{-1}TPSRQxy \approx xyx^{-1}y^{-1}TPSRQ$$

我们注意到$T = x_1x_1...x_rx_r$与交叉成分$xyx^{-1}y^{-1}$连在一起，我们只需要把成分放到后面，再反复进行同样的操作，就可以得到曲面表示的基本形式是$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_sb_sa_s^{-1}b_s^{-1}x_1x_1...x_rx_r$。

Step4:接下来我们要跳出基本模型，我们已经证明了任何不同胚于球面的流形M，一定是由环面和实射影平面的有序连通和构成的即有

$$M \cong (\#_s\mathbb{T}^2)\#(\#_r\mathbb{P}^2)$$

如果$r = 0$，则M同胚于环面的连通和。否则，我们注意到*2*维流形的连通和具有结合律，其它的性质并不是很清楚，我们利用之前所得到的公式$\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$可以将$s$消成零，从而$M$同胚于实射影平面的连通和。

Step5:最后，我们需要说明$\mathbb{S}^2, \#_g\mathbb{T}^2, \#_h\mathbb{P}^2$是互不同胚的，只需找一些同胚不变量，说明上面几个流形的这几个不变量互不相同即可，其中最好用的是同调群。

表 2: 二维闭流形的奇异同调群

流形	$\mathbb{S}^2$	$\#_g\mathbb{T}^2$	$\#_h\mathbb{P}^2$
$H_0(M)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$H_1(M)$	0	$\mathbb{Z}^{2g}$	$\mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$H_2(M)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
$\chi(M)$	2	$2-2g$	$2-h$

定理 3.4: 在“流形”等价于“豪斯多夫+第二可数+连通+紧”的前提下

(1)二维流形的同胚和微分同胚是等价的

(2)二维可定向流形同胚于$\mathbb{S}^2$或$\#_g\mathbb{T}^2$

(3)二维不可定向流形同胚于$\#_h\mathbb{P}^2$

(4)二维带边流形同胚于二维流形挖去任意的开圆盘。

3.3 自由群

注意到，我们在研究二维流形的时候使用了一种很有趣的“多边形表示”，实际上它利用了群论中自由群的基本思想，笔者想在这里稍微介绍一下。

定义 3.2: 设X是群F的子集。如果对每个群G和函数$f:X\to G$存在唯一同态$\varphi:F\to G$满足$\forall x\in X,\varphi(x)=f(x)$，则称$F$是以$X$为基的**自由群**。

对任意的集合X，我们只需要先定义$X\sqcup X^{-1}$的等价关系$xx^{-1}\sim 1$，就可以得到一个关于“连接”运算的以X为基的自由群$F=X\sqcup X^{-1}/\sim$。更重要的是可以得到自由群的唯一性。

定理 3.5: 如果F_1是以X_1为基生成的自由群，F_2是以X_2为基生成的自由群，且有双射$f:X_1\to X_2$，则存在由f扩张的群同构$\varphi:F_1\to F_2$。

因此大多数情况下，我们都直接把由X生成的自由群称为“自由群”，通常我们把F的元素称为**词**(word)。如果从中文的角度来看，我们也可以把X的元素称为**字**。由自由群的万有性质和群的同构定理，我们可以证明。

定理 3.6: 每一个群都是自由群的商群。

这句话告诉我们一个事实，任意群G的元素可以通过集合X和同态$f:F\to G$的核来进行生成，我们可以给出下面的定义。

定义 3.3: 群G的一个**表现**指的是一个有序对(X,R)，并且满足$G\cong F/N$。其中X是字的集合，R是一个词的集合，F是以X为基生成的自由群，N是R的所有共轭元素生成的群。我们把X称为**生成元**，R称为**关系**。

下面是几个比较著名的例子。

1. 二面体群D_{2n}:$a^n=1,b^2=1,bab=a^{-1}$,其中$X=\{a,b\},R=\{a^n,b^2,baba\}$
2. 广义四元数群$\mathbf{Q}_n$:$a^{2^{n-1}}=1,bab^{-1}=a^{-1},b^2=a^{2^{n-2}}$,其中$X=\{a,b\},R=\{a^{2^{n-1}},bab^{-1}a,b^{-2}a^{2^{n-2}}\}$

如果X是有限的，我们就称G是**有限生成**的，如果X和R都是有限的，就称G是**有限表示**的，显然我们的两个例子就是有限表示的。接下来我们具有一个著名的联系定理。

定理 3.7: 群G是有限表示的当且仅当，存在一个有限复形X使得$G\cong\pi_1(X)$。

这个定理看起来挺神奇的，如果只考虑第一个基本群是否是有限表示的，确实是很明显的，但反过来却并不简单。自由群还有很多内容，但并不属于我们的主线，我们提一个有趣的东西，差不多就可以结束这部分了。

定理 3.8: (1)一个光滑的，不可约的，次数为d的平面复射影代数曲线是，一个连通的，紧的，可定向的，亏格为$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$的2维流形

(2)一个具有光滑黎曼度量的可定向2维流形是，一个1维复流形，即具有复构造。

4 三维流形

4.1 严格表述

接下来我们将进入最艰辛的部分，即三维流形的分类。同样我们只考虑紧3维流形，首先根据这本书[5]，它说明了几个事实，3维流形是可三角剖分的(此处就是可剖分的意思)，接着其根据这个事实，进一步推出了3维流形具有唯一的光滑构造，最后如果是带边情形，可以通过流形挖去一下构造来得到，比如环面、球面什么的。同时还得加上“可定向”的条件，这就是Thurston几何化猜想，前提有那么一点点的多，所以3维流形的完全分类还是处于探索之中。我们就只能以现有的条件来介绍**几何化猜想**的证明，当然我们并不是参考Perelman的原始论文[9, 11, 10]，因为它写得有点太“简洁”了，而且证明的关键“里奇流”介绍的并不充分，这几篇文章[4, 6, 2]将是我们的主要参考对象。以后我们统一以“光滑流形”(smooth manifold)来称呼“微分流形”，主要是前者用的比较多，并且不加说明时，3维流形统一假设前提为“豪斯多夫+第二可数+连通+紧+可定向”。

连通和

在理解“Thurston几何化猜想”的表述之前，我们需要先稍微熟悉一下3维流形的一些基础性质。首当其冲的就是“基本群的决定同调群”，对于3维流形M，我们设它的第一个基本群为$\pi_1(M)$，那么我们就可以得到它的所有同调群了。

$$H_1(M,\mathbb{Z}) = H^2(M,\mathbb{Z}) = \pi_1(M)^{ab}$$
$$H_2(M,\mathbb{Z}) = H^1(M,\mathbb{Z}) = \pi_1(M)/\pi_1(M)^{tors}$$
$$H_3(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

其中，$\pi_1(M)^{ab}$表示关于其换位子群的商群(也叫做abelianisation)，$\pi_1(M)^{tors}$表示挠群部分(即极大有限交换子群)，对于连通流形来说，第0个同调群没啥好说的，其它的都是平凡群就更没啥好说的了，我们注意到第3个同调群非平凡，意味着这一系列定理是针对可定向流形的，而第1个同调群的性质实际上是所有道路连通空间的性质，而上下同调群的关系则来自于可定向闭流形的庞加莱对偶定理(Poincare duality theorem)。

那么我们实际上就可以通过基本群来区分大多数的3维流形了。不过为了找出“积木元素”，我们还需要3维流形上的连通和，它不像2维流形那样具有唯一性，但如果我们稍加限制就有所不同了，对于n维可定向流形的连通和$M_1\#_f M_2$，其粘合映射$f:\partial M_2' \to \partial M_1'$是一个**定向反转微分同胚**(orientation-reversing diffeomorphism)，即将流形的定向转化为另一个，它是定向保持(orientation preserving)的反面，其基本特点是转化函数的雅可比行列式是负数，比如在曲面上，大家可以形象地理解为将一个流形粘合到另一个流形的里面去，当然这只能定义在定向曲面上，此时我们有下面的唯一性定理。

定理 4.1 (**定向反转连通和**): *可定向光滑流形的(定向反转)连通和，在微分同胚的意义下由两个流形确定，并且满足交换律、结合律和球面$\mathbb{S}^3$作为单位元。*

以后我们的“连通和”统一代指“定向反转的连通和”，由于我们考虑了带边流形，因此它还有一个性质

$$\partial(M_1\#M_2)=\partial M_1\#\partial M_2$$

即3维流形连通和与2维流形连通和之间的关系，值得注意的是上面的定理和下面的定义都没指明维数，也就是说这些东西是全维数通用的。借助“连通和”我们可以给出素性的定义。

定义 4.1: 如果可定向流形M满足$M=M_1\#M_2$是平凡的，即M_1或M_2是球面，则称M是**素的**(prime)。

对于3维流形，我们可以得到类似素因子的分解定理。

定理 4.2 (Prime decomposition Theorem for 3-manifolds): 任意3维(可以带边)流形M都可以通过连通和分解成素3维流形

$$M=M_1\#...\#M_k$$

并且在交换位置、删除或添加$\mathbb{S}^3$下是唯一确定的。

以后我们的3维流形统一指带上了素的条件，即“豪斯多夫+第二可数+连通+紧+可定向+素的”。对于紧带边2维流形，它的边界由一系列的圆构成，因此分类时我们只需要将2维(不带边)流形挖去若干个圆盘即可。对于3维流形，边界是一系列2维流形，所以只需要挖去一些2维结构即可得到带边情形，像球面，环面之类的，由于我们假设了定向的前提，所以挖去实射影平面的情形是唯一的，即有下面的定理。

定理 4.3: 包含实射影平面$\mathbb{P}^2$的3维流形只有实射影空间$\mathbb{P}^3$。

提醒读者一下，3维实射影空间$\mathbb{P}^3$是可定向的，那么边界所剩下的情况就是，所有的可定向曲面了，即球面和带柄球面。最后我们把不是$\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$的素流形称为是**不可约的**(irreducible)，它的典型特征是，每一个嵌入$\mathbb{S}^2\to M$都是一个闭圆盘的嵌入$D^3\to M$在∂D^3上的限制。

JSJ分解

实际上，就算加上了“素”的条件3维流形的种类还是太多了，通过“不可约”我们只排除了一种情况，因此我们不得不考虑对3维不可约流形进行进一步的拆分。我们先来介绍一些需要用到的基本概念。为了以后的便利，对于嵌入子流形$S\to M$，我们直接记为$S\subset M$，用来表示M的一部分，比如开圆盘嵌入$B\to M$我们直接写为$B\subset M$来表示可能的像，类似地有闭圆盘嵌入$D\subset M$。

定义 4.2: (1)如果连续映射$f:M\to N$满足对任意紧子集$U\subset N$有$f^{-1}(U)$是紧子集，我们就把它称为是**恰当的**(proper)。可以证明如果$f:\mathrm{Int}M\to\mathrm{Int}N$是恰当的，则有$f^{-1}(\partial N)=\partial M$。更进一步，在带边流形中，如果$M$是紧的且$f^{-1}(\partial N)=\partial M$则$f:\mathrm{Int}M\to\mathrm{Int}N$是恰当的。因此在我们对流形的大前提假设下，“恰当的”指的是逆映射保持边界的性质

(2)对于两个嵌入映射$f,g:X\to Y$，如果存在连续映射$H:X\times[0,1]\to Y$使得$\forall x\in X,H(x,0)=f(x),H(x,1)=g(x)$，并且$\forall t\in[0,1],h_t(x)=H(x,t)$是嵌入映射,则称$f$与$g$**同痕**(isotopy)，它是同伦的加强版本，类似“同伦”的操作可以得到拓扑空间同痕的定义

(3)设M是3维流形，S是一个满足$\chi(S)\leq 0$的可定向曲面且有恰当的嵌入$S\subset M$，如果对任意闭圆盘$D\subset M,\partial D=D\cap S$都存在$D'\subset S$满足$\partial D=\partial D'$，就称$S$在$M$中是**不可压缩的**(incompressible)。

我们的目的是通过3维流形上的不可压缩曲面来把流形分成几个部分，那么我们就有必要探索流形上到底有哪些可能的不可压缩的曲面。实际上，$\mathbb{R}^3,S^3$都不存在不可压缩曲面，自然就没有什么分割的必要了。其中最重要的就是环面分割了，我们来看一下环面何时是一个不可压缩曲面，即有下面定理。

定理 4.4: 设M是不可约3维流形，则对于环面$T\subset M$下面至少有一个是成立的：T在M中不可压缩、T是一个实心环的边界、T在一个球内。

我们只需要排除后面两个条件，环面就能变得不可压缩了，要说找吧也是能找到的，比如欧式空间中扣掉环面的内部构成的空间。对于3维流形而言“不可压缩的曲面”存不存在是无所谓的，但是如果有的话，肯定是更好的，而且如果能把分割后的几个子流形进行归类的话就更好了，我们先把“分割”进行严格叙述一下。如果3维流形M，存在一个不可压缩曲面的有限分离并$\sqcup_i S_i\subset M$，我们就把它称为M的一个不可压缩分割，此时$M-\sqcup_i S_i$将存在相应数量的连通分支，我们记为$\sqcup_j M_j=M-\sqcup_i S_i$，其中的每一个$M$是连通的3维流形，特别地，如果不可压缩分割为空集，我们使用M自己来代替相应的连通分支，即$M_1=M-\sqcup_i S_i$。我先有一个比较基本的分解定理。

定理 4.5 (**JSJ分解定理**): 设M是不可约3维流形，则存在一个不可压缩分割$\sqcup_i T_i\subset M$，使得T_i是环面、M_j要么是**Seifert流形**要么是**非环**(atoroidal)，且最小的分割$\sqcup_i T_i$在同痕意义下是唯一的。

实际上，如果要将JSJ分解定理扩展到带边流形的话，则要求它的边界由环面构成。上面分解之中涉及了两个我们没见过的特殊流形，它们其实都是以一些特性来命名的流形，我们给出它们的定义。

定义 4.3: 设M是3维流形

(1)如果不可压缩曲面$S\subset M$存在同痕$S\to\partial M$，就称它是**边界平行的**(boundary parallel)。如果M的每个不可压缩环面都是边界平行的，我们就称它是一个**非环**

(2)如果存在一个有限覆盖$M=\cup_i M_i$，使得每一个M_i都是某个曲面上的S^1-主丛[8]，则称M是一个**Seifert流形**。

读者需要注意的是，我们说的是满足某些性质的环面分割是唯一的，并不是说不可压缩分割是唯一的。完成JSJ分解以后，我们离几何化猜想已经越来越近了，因为我们知道现在只需对“Seifert流形”和“非环”进行几何化，就完成了几何化猜想。

几何化

接下来我们该引入我们的主角“几何化”(Geometrisation)了。由于我们的流形假设了“豪斯多夫+第二可数”，再加上之前说明了3维流形存在光滑构造且唯一，因此对一个3维流形M，

[8]具有李群结构的球面只有S^0,S^1,S^3

我们都可以配备一个度量张量，从而形成一个黎曼流形(M,g)，当然我们并不是要去区分一个流形上的度量张量，而是反过来通过度量张量来区别流形，这就是几何化的思想。我们还是先拿2维流形举个例子吧，我们记$S_{g,b,a}$表示亏格为g的可定向曲面移除b个圆盘和a个点形成的2维流形，那么它的欧拉示性数就是$\chi(S_{g,b,a})=2-2g-b-p$，接着我们就要通过度量张量进行的分类定理。

定义 4.4: 设(M,g)是黎曼流形

(1)对一点$p\in M$和二维子空间$\sigma\in T_p(M)$，我们任意选取两个线性无关向量$X,Y\in\sigma$，并计算

$$K(X,Y):=\frac{R(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2-(XY)^2}$$

可以证明它与X,Y的选取无关，我们把$K(p,\sigma):=K(X,Y)$称为流形在p处的关于σ的**截面曲率**

(2)如果流形满足$K:=K(p,\sigma)$与σ的选取无关，当$K<0$时，我们称为**双曲度量**；当$K=0$时，我们称其为**平坦度量**；当$K>0$是，我们称其为**椭圆度量**

(3)如果流形上的等距变换群是流形上的平移作用，我们就把M称为**处处相同流形**(homogeneous manifold)

(4)如果存在一个处处相同流形(M',g')，使得(M,g)有一个领域可以等距地变换[9]到(M',g')的一个开集上，则称M是以(M,g)为模型的**局部处处相同流形**(locally homogeneous manifold)。

由于黎曼度量赋予了距离的性质，进行拓扑变形的时候并不能随意，所以引入了“局部处处相同流形”，在2维流形中“处处相同流形”最典型的例子就是我们之前所讨论的，球面几何$\mathbb{S}^2$、双曲几何$\mathbb{H}^2$、平面几何$\mathbb{R}^2$。我要注意它们随便进行拉伸就不会再是处处相同流形了，另外我们只是单纯地用高斯曲率K的“正，负，零”(二维时与二维子空间的选取无关)来区分这几种几何，至于$\mathbb{S}^2$是球面还是平面赋予了球面的度量都是无所谓的，对于二维流形我们有下面定理。

定理 4.6: 对于2维流形$S=S_{g,b,a}$

(1)如果$\chi(S)>0$，则S上存在一个椭圆度量；如果$\chi(S)=0$，则S上存在一个平坦度量；如果$\chi(S)<0$，则S上存在一个双曲度量

(2)换句话说就是，每个2维流形都是以$\mathbb{S}^2$、$\mathbb{H}^2$或$\mathbb{R}^2$为模型的局部处处相同流形。

由于2维流形的切空间是2维的，因此“等距变换群是流形上的平移作用”就是高斯曲率K恒为常数，因此正好就只产生了这三者几何。但如果放到3维流形上就有所不同了。由于3维流形很复杂，我们依旧使用之前的大量假设，那么我们的目标就是把“Seifert流形”和“非环”转化为几种特殊模型的局部处处相同流形。对于“Seifert流形”的几何化分类是早就存在的，我们记$e(M)$表示流形的欧拉类(Euler class)，那么下面的表给出了几何化分类定理。

定理 4.7: 作为JSJ分解中的Seifert流形M是以下面的几何为模型的局部处处相同流形

特征数	$\chi(M)>0$	$\chi(M)=0$	$\chi(M)<0$
$e(M)=0$	$\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$
$e(M)\neq 0$	$\mathbb{S}^3$	Nil	$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$

[9]即一个同胚满足对应点之间由度量张量定义的距离保持不变

并且M以Sol为模型只有当M是非Seifert纤维空间的环丛才可能产生。

所以实际上，Perelman解决的是“非环情形”，即下面的这个定理，这也是我们整节主要要讨论的内容。

定理 4.8 (要证明的定理): *作为JSJ分解中的非环M是以$\mathbb{S}^3$或$\mathbb{H}^3$为模型的局部处处相同流形。*

虽然这个定理好像比前面的要简单一些，但简单才是要命的，几何化定理的难点就是这一部分。当然这个猜想多出的一种$\mathbb{H}^3$几何并不是空穴来风，而是之前就已经证明了“$\mathbb{H}^3$几何只能存在于非环上”，参考这几篇文献[12, 15, 13, 14]， Thurston发现一种特殊的流形**Haken流形**，即至少存在一个不可压缩曲面的3维流形，满足几何化猜想，且最后可以化为下面的8中几何。

$$\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \mathrm{Nil}, \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}, \mathrm{Sol}$$

这样就只剩下不存在不可压缩曲面的3维流形的情况了，但是还是有那么一个关键点无法突破。另外，无论是“Haken流形”情形还是“Seifert流形”情形都无法推出庞加莱猜想，即“基本群平凡的3维流形同胚于3维球面”， 因为满足这种性质的3维流形， 既不是Haken流形，也不是Seifert流形，最后只能落在非环中。如果加上Perelman的结论，它只可能有两种模型，接着由于前提假设了紧性，从而只能同胚于$\mathbb{S}^3$。

4.2 几个关键点

Ricci流

接下来，我们将主要研究紧黎曼流形(M,g)的一个局部(U,x^i)，此时各种张量均有对应的分量，比如$g_{ij}, R^l_{jik}, R_{klij}$之类的，我们定义一个新的张量分量

$$R_{ki} = g^{lj} R_{klij}$$

它构成的张量Ric称为**Ricci曲率张量**，更进一步我们可以定义

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

并把这个数值称为此处的**标量曲率**(scalar curvature)。我们知道如果流形是固定的，即g在每点处保持不变，上面的分量其实就是一些数值，可以直接计算出来，而我们的目的就是让它们动起来，用拓扑学的角度来看，就是我们要把这个流形进行变换，简单来说，我们让度量张量变成一个与数值t相关的函数，也称为时间演化，此时我们定义一个偏微分方程

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

我们把上面这个动力系统称为**Ricci流**(Ricci flow)，由于标号太多了，我们就直接看张量构成的方程，即

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}(g(t))$$

我们需要注意Ricci曲率张量是可以通过度量张量给计算出来的，所以我们就把它套在了度量张量上。接下来，我们用一些比较现代的符号，我们把黎曼流形上的那个唯一黎曼联络记为$\bigtriangledown_X Y$，并进一步引入记号

$$\bigtriangledown : TF(M) \to TF_1^1(M), Y \mapsto (X \mapsto \bigtriangledown_X Y)$$

接着我们把切空间的基$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$记为$\{\partial_i\}$。我们把之前的Hessian算子记为

$$\mathrm{Hess} : C^\infty(M) \to TF_2^0(M), f \mapsto ((X,Y) \mapsto (X(Y(f)) - \bigtriangledown_X Y(f)))$$

以后不加说明I指开区间(a,b)。如果流形上的曲线$\gamma : I \to M$满足$\bigtriangledown_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$就把它称为是一条**测地线**(geodesic)，Ricci流的方程实际是一个抛物偏微分热方程，我们可以通过加一些限制来找到一些比较简单的解，如果存在度量g_0使得$\mathrm{Ric}(g_0) = \lambda g_0$，我们就称$g_0$是一个**爱因斯坦度量**(Einstein metric)，此时我们假设Ricci流的初始条件为$g_0 = g(0)$，就可以得到一个解为

$$g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$$

我们把$\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$的解分别称为**收缩**(shrinking)、**稳定**(steady)、**扩张**(expanding)的解。实际上，$\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$上的标准度量就分别对应了这三种爱因斯坦度量，有关Ricci流首先我们可以得到一个粘合的性质。

定理 4.9 ([3]): 设(M, g_0)是一个紧黎曼流形

(1)则存在一个取决于(M, g_0)的$T > 0$和一个Ricci流$(M, g(t)), 0 \le t < T$满足$g(0) = g_0$

(2)如果定义在两个区间上的Ricci流，都以(M, g_0)作为初始条件，那么它们在公共部分处是一样的。

定理的(1)部分说明了，紧黎曼流形上Ricci流的存在性，而(2)部分通过粘合来告诉你，Ricci流是被初始条件决定的，这也可以看成解的唯一性。对于Ricci流，我们通常视为满足相应方程的一簇黎曼流形$(M, g(t))$，但实际上如果我们把时间移出来，构造流形$\mathcal{M} = M \times I$和相应的度量G，那么它就变成了一个整体的流形，而对于每个节点，可以通过相应的时间切片来得到，这也称作Ricci流的一般化，它只是换一个角度看问题，并没有改变Ricci流的本质，我们来把它严格定义一下。

定义 4.5: 所谓**时空**(space-time)，指一个n+1维流形$\mathcal{M}$配备了一个光滑函数$\mathbf{t} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$和光滑向量场$\chi$并且满足

(1)$\mathbf{t}$的像是一个[10]区间I并且$\partial\mathcal{M} = \mathbf{t}^{-1}(\partial I)$

(2)对于每个$x \in \mathcal{M}$，存在一个领域$U \in \mathcal{M}$和一个微分同胚$f : V \times J \to U$，其中$U \in \mathbb{R}^n$是开集，并且区间J满足(i)f^{-1}在区间J上的投影映射是$\mathbf{t}$的一部分(ii)χ是单位向量场$\{v\} \times J \subset V \times J$在$f$下的像

我们把$\mathbf{t}$称为**时间**(time)，我们把$\mathbf{t}$的等值集称为一个**时间切片**(time-slices)，即对$t \in I$我们记$\mathcal{M}_t = \mathbf{t}^{-1}(t) \subset \mathcal{M}$，我们把与时间切片相切的分布称为**平行分布**(horizontal distribution)，我们把平行分布上得到的一个度量张量称为时空$\mathcal{M}$的**平行度量**(horizontal metric)。

[10]加了说明就不一定指开区间了

对于时空$\mathcal{M}$和相应的平行度量G，我们就可以得到每个时间切片$\mathcal{M}_t$的相应的度量张量$g(t)$了，接下来我们要把Ricci流的相应限制转移到时空上去，我们把Lie导数记为$\mathcal{L}_X Y$，则相应的限制方程变成了

$$\mathcal{L}_\chi G = -2\mathrm{Ric}(G)$$

根据时空的定义，χ时间就是拿来适配时间$\mathbf{t}$的向量场，即有$\chi(\mathbf{t}) = 1$，这样相应的Lie导数和我们之前对时间求偏导就是一个意思了，简单来说此时只是Ricci流方程在时空上的变形而已。如我们之前所说，Ricci流有点过于广泛，选出一些我们需要的适应我们需求的Ricci流就是有必要的了，换言之就是给方程加上一些限制条件，另一方面由相当于给证明加上了更多的条件以便更好地达到目标。首先是**手术时空**(surgery space-time)，它指时空$\mathcal{M}$存在一个覆盖，使得每个坐标是某三种类型中的一种，这三种类型的叙述有些麻烦。简单来讲，类型一指我们定义中的那个区间是有限的，此时我们把坐标中的每点称为**光滑点**(smooth point)，类型二指我们定义中的那个区间包含了单边无限的点，此时我们把坐标中的每点称为**暴露点**(exposed point)，类型三指退化情形，此时也是最难办的情况[11]，称为**奇点**(singular point)，读者不需要懂得太多，大量的计算证明看着还是很累的，进一步如果在手术时空$\mathcal{M}$上满足

$$\mathcal{L}_\chi G(x) = -2\mathrm{Ric}(G)(x), \forall x \in \mathcal{M}$$

我们就把它称为**带手术的Ricci流**(Ricci flow with surgery)。我们最好还是通过例子来理解这种Ricci流，比如通常意义下的Ricci流$M_0 \times I$，时间$\mathbf{t}$和向量场χ由后面的区间确定，这时Lie导数得到的方程会退化为我们的通常情形。

长时间存在

我们不会去研究一般带手术的Ricci流，而是赋予它限制，并探讨两个问题“长时间存在”和“有限时间消亡”，这是完成几何化猜想的最重要的两步。接下来我们只针对3维流形，所谓“限制”具有多方面的含义，数学家总是试着得到更加广泛的结论，所以无论如何都不会从非环作为起点，而是提取一些非环所具有的前提作为假设，从而证明更一般的结论，对于通读的我们来说，这些完全没有必要理会的，再说了这些繁琐的限制最多这里一用以后就见不到了，有必要理解吗？没必要，除非你是真的在研究这玩意，我就不是了，我只是来凑个热闹的求知者罢了。

定理 4.10 (Long-time existence): *对于给定常数$\varepsilon > 0$和定义在$\mathbb{R}_{\geq 0}$上的连续正值函数$\delta(t) > 0$和标准(normalized)3维流形M_0，存在定义在$\mathbb{R}_{\geq 0}$上的两个非递增的连续正值函数$\tilde{\delta}(t) \geq \delta(t), \tilde{r}(t)$使得有一个以上面3维流形为初始条件的带手术的Ricci流为下面的两种情况*

(1)定义在$\{0\} \cup (0, T)$(第一个部分为初始条件)上，其通过有限个由$\delta(t), t \in (0, T)$构成的$\delta-$切除手术($\delta-$cutoff surgery)得到。此时，我们称这个Ricci流在有限时间T后消亡，并且初始条件的流形微分同胚于$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}$和$\mathbb{S}^3/\Gamma$的有限连通和

(2)定义在$\{0\} \cup (0, +\infty)$，其通过最多可数个由$\delta(t), t \in (0, +\infty)$构成的$\delta-$切除手术($\delta-$cutoff surgery)得到。此时，$\tilde{r}(t)$满足捏假设(pinching assumption)和精度为ε的典型领域假设(canonical

[11] 实际上，Hamilton已经证明了Ricci流的非奇异解，即不包含奇点，满足几何化猜想

neighborhood assumption with accuracy ε)并且每个有限区间上的$\delta-$切除手术都是有限个的。

看不懂不要紧，首先对于我们需要演化的初始流形，需要满足标准的条件，其实对度量随便乘下系数就能得到，加不加其实无所谓。其次，对于带手术的Ricci流，我们可以给出2个参数限制，即$\varepsilon > 0$和$\delta(t)$，后者是用了告诉Ricci流要以怎样的方式进行运动，第一部分得到有限消亡就已经结束了，而第二部分属于长时间解，但我们得到了两个符合一些假设的约束，即$\tilde{\delta}(t)$和$\tilde{r}(t)$，它们主要还是为了我们下一步份的定理，即“长时间解的有限时间消亡”。

有限时间消亡

定理 4.11 (Finite-time extinction): *对于3维流形M，假设它的基本群由有限群和无限循环群的直和构造，并且不包含$\mathbb{P}^2$。此时，设$(M, g(t))$为上一个定理导出的带手术的Ricci流，则它在有限时间内消亡，即对于所有充分大的T，时间切片$\mathcal{M}_t$都是空的。*

请读者要注意，“长时间存在”和“有限时间消亡”实际上应该看为一个整体，它们构成了Perelman证明的核心内容，确实有些荒谬，为什么就这样的事实还得分这么多部分来讲。实际上，一大堆乱七八糟的前提看得也心烦，就如我们之前所说，无非就是证明了非环以$\mathbb{S}^3$或$\mathbb{H}^3$为模型的局部处处相同流形，在带手术的Ricci流，常曲率一直是一个很常见的词，在流形上，能产生常曲率就那么3种，即球面几何、欧式几何和双曲几何。为什么，我不想给出完整的证明呢？简单来说，结论简单，但过程太长，已经远远超出了我的能力水平了。最重要的是，“它太不拓扑了”，特别是这个变形的过程，要通过一个偏微分方程的方式来实现，并且各种限制看得眼花缭乱的，才最终发现了一个优秀的路径，为什么非环情形会比Seifert流形情形麻烦这么多，我不知道，也不想理解。

5 尾声

对于3维流形情形，虽然笔者研究[6]和[2]已经快一个月了，前一个主要针对庞加莱猜想，后一个主要针对几何化猜想，两者在叙述的笔触上还有大量的不同，但是进展缓慢到我放弃了，这确实是一个遗憾，但也只是一个遗憾了。因为这些东西，真就没什么主线了，无非就是不断加条件，不断消去有些条件产生的情况，不断地去计算，要说是在学习吧，我觉得根本就不是，而是在给他们做验算。以我个人观点来看，理解Ricci流这个工具反而是更有用的，因为不只是在数学上，物理上也是很有用的。好吧，也没什么可说的，我的这篇文章或许也只能作为学习3维流形分类的一个引子，因为就算得到了几何化定理，3维流形分类其实还是没解决。我们有缘再见吧。

参考文献

[1] Edward M. Brown and Robert Messer, *The classification of two-dimensional manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society **255** (1979), 377–402.

[2] Huai-Dong Cao and Xiping Zhu, *Hamilton-perelman's proof of the poincaré conjecture and the geometrization conjecture*, `https://arxiv.org/abs/math/0607607`, 2006.

[3] Richard S. Hamilton, *Three-manifolds with positive ricci curvature*, Journal of Differential Geometry **17** (1982), 255–306.

[4] Bruce Kleiner and John Lott, *Notes on perelman's papers*, `https://arxiv.org/abs/math/0605667`, 2006.

[5] Edwin E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, 1977.

[6] John W. Morgan and Gang Tian, *Ricci flow and the poincare conjecture*, `https://arxiv.org/abs/math/0607607`, 2006.

[7] Daniel Müllner, *2-manifolds*, `http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/2-manifolds`, 2022.

[8] nLab, *exotic smooth structure*, `https://ncatlab.org/nlab/show/exotic+smooth+structure`, 2021.

[9] Grisha Perelman, *The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications*, `https://arxiv.org/abs/math/0211159`, 2002.

[10] ———, *Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds*, `https://arxiv.org/abs/math/0307245`, 2003.

[11] ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, `https://arxiv.org/abs/math/0303109`, 2003.

[12] William P. Thurston, *Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bulletin of the American Mathematical Society **6** (1982), 357–381.

[13] ———, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, i: Deformation of acylindrical manifolds*, Annals of Mathematics **124** (1986), 203.

[14] ———, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, ii: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, 1998.

[15] William P. Thurston and Silvio V. F. Levy, *Three-dimensional geometry and topology*, 1997.

[16] Oleg Viro, *1-manifolds*, `http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/1-manifolds`, 2013.

[17] 逯晓零, 代数分析几何简介, 2023.

[18] ———, 朗兰兹纲领简介, `https://lixing48.gitee.io/download/LanglandsProgram.pdf`, 2023.